ÉNONCÉS

Ex. 70 Déterminer le reste dans la division euclidienne :

a) de 14^{200} par 5.
b) de 11^{101} par 3.

Ex. 71 n désigne un nombre entier naturel.
Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne :

a) de n^2 par 5.
b) de n^3 par 7.

Ex. 92 n désigne un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.
$a = n^2 + 2n - 3$ et $b = n^2 + 4n + 3$

a) Factoriser a et b.
b) Déterminer $\text{PGCD}(n-1, n+1)$ en distinguant les cas n pair et n impair.
c) Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ en fonction de n.

Ex. 93 Déterminer les couples (x, y) de nombres entiers naturels solutions du système suivant :
$$\begin{cases} x + y = 1902 \\ \text{PGCD}(x; y) = 317 \end{cases}$$

CORRIGÉ

Exercice 70

a) Reste dans la division euclidienne de 14^{200} par 5

On a : $14 \equiv 4 \ [5] \equiv -1 \ [5]$
D'où $14^{200} \equiv (-1)^{200} \ [5]$
$14^{200} \equiv 1 \ [5]$

Or $0 \leq 1 < 5$

Donc $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 14^{200} \text{ par 5 est égal à 1.}}$

b) Reste dans la division euclidienne de 11^{101} par 3

On a : $11 \equiv 2 \ [3] \equiv -1 \ [3]$
D'où $11^{101} \equiv (-1)^{101} \ [3]$
$11^{101} \equiv -1 \ [3]$
$11^{101} \equiv 2 \ [3]$

Or $0 \leq 2 < 3$

Donc $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 11^{101} \text{ par 3 est égal à 2.}}$

Exercice 71

a) Les restes possibles dans la division euclidienne de tout entier n par 5 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4.

$n \equiv \ldots \ [5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \ldots \ [5]$	0	1	4	4	1

Donc $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } n^2 \text{ par 5 sont : 0 ; 1 ou 4.}}$

b) Les restes possibles dans la division euclidienne de tout entier n par 7 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

$n \equiv \ldots \ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv \ldots \ [7]$	0	1	1	6	1	6	6

Donc $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } n^3 \text{ par 7 sont : 0 ; 1 ou 6.}}$

Exercice 92

a) Pour tout entier naturel n :

$a = n^2 + 2n - 3$

$a = n^2 + 2n + 1 - 4$

$a = (n+1)^2 - 4$

$a = (n+1)^2 - 2^2$

$a = (n+1-2)(n+1+2)$

$\boxed{a = (n-1)(n+3)}$

Pour tout entier naturel n :

$b = n^2 + 4n + 3$

$b = n^2 + 4n + 4 - 1$

$b = (n+2)^2 - 1$

$b = (n+2)^2 - 1^2$

$b = (n+2-1)(n+2+1)$

$\boxed{b = (n+1)(n+3)}$

b) Soit $d = \text{PGCD}(n-1\,; n+1)$

Alors : d divise $n-1$ et divise $n+1$;
donc d divise toute combinaison linéaire
de $n-1$ et $n+1$.
En particulier : d divise $n+1-(n-1)$
C'est-à-dire : d divise 2
Donc $d = 1$ ou $d = 2$.

. Si n est impair,
alors $n-1$ et $n+1$ sont tous les deux pairs,
donc 2 divise $n-1$ et $n+1$.
Donc $d = 2$.
C'est-à-dire : $\boxed{\text{PGCD}(n-1\,; n+1) = 2}$

. Si n est pair,
alors $n-1$ et $n+1$ sont tous les deux impairs,
donc 2 ne divise pas $n-1$ et $n+1$.
Donc $d = 1$.
C'est-à-dire : $\boxed{\text{PGCD}(n-1\,; n+1) = 1}$

c) $\text{PGCD}(a\,; b) = \text{PGCD}(n^2 + 2n - 3 \;;\; n^2 + 4n + 3)$

$\text{PGCD}(a\,; b) = \text{PGCD}((n-1)(n+3) \;;\; (n+1)(n+3))$

$\text{PGCD}(a\,; b) = (n+3)\text{PGCD}(n-1 \;;\; n+1)$

Par conséquent :

$\boxed{\begin{array}{l} \text{. si } n \text{ est impair, } \ \text{PGCD}(a\,; b) = (n+3) \\ \text{. si } n \text{ est pair, } \ \text{PGCD}(a\,; b) = 2(n+3) \end{array}}$

Exercice 93

On cherche les couples $(x\,; y)$ solutions du système

$$\begin{cases} x + y = 1902 \\ \text{PGCD}(x; y) = 317 \end{cases}$$

$\text{PGCD}(x; y) = 317$ si et seulement si il existe deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que :

$$\begin{cases} x = 317x' \\ y = 317y' \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} x + y = 1902 \\ \text{PGCD}(x; y) = 317 \end{cases}$$ si et seulement si il existe

deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux

tels que :

$$\begin{cases} x + y = 1902 \\ x = 317x' \\ y = 317y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 317x' + 317y' = 1902 \\ x = 317x' \\ y = 317y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' + y' = 6 \\ x = 317x' \\ y = 317y' \end{cases}$$

Les couples $(x'\,; y')$ possibles d'entiers naturels premiers entre eux et dont la somme est égale à 6 sont : $(1\,; 5)$ et $(5\,; 1)$.

$317 \times 5 = 1585$

On en déduit que :

$\boxed{\text{le système possède exactement deux couples } (x\,; y) \text{ solutions : } (317\,; 1585) \text{ et } (1585\,; 317).}$