TS.Spé Mathématiques ++P | Thème 1 arithmétique | COURS – SYNTHÈSE 2^{NDE}

La divisibilité en classe de seconde

v 1.1

1) Entiers naturels

a) Les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ... sont appelés **entiers naturels**.

Il en existe une infinité.

! Il n'existe pas de nombre entier qui soit plus grand que tous les autres → notion d'**infini**.

L'ensemble de tous les entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

On a donc : $\boxed{\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}}$

b) Symbole d'appartenance : $\in$

. exemple : l'écriture « $19 \in \mathbb{N}$ » signifie que 19 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$.

. Autres exemples : $40 \in \mathbb{N}$; $9 \in \mathbb{N}$; $10^4 \in \mathbb{N}$

$-6 \notin \mathbb{N}$; $10^{-4} \notin \mathbb{N}$; $\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$

2) Entiers relatifs

a) L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, contient tous les entiers naturels, ainsi que leurs opposés.

Ainsi : $\boxed{\mathbb{Z} = \{ \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}}$

b) Symbole d'inclusion : $\subset$

. Explication : « $A \subset B$ » se lit « l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B » et signifie que tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B.

. Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\{ \dots ; -3 ; -2 ; -1 ; \underbrace{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots}_{\mathbb{N}} \}}_{\mathbb{Z}}$$

! Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$ ni leurs significations respectives.

! Si l'on dit qu'un nombre est un « entier » cela signifie que c'est un entier relatif.

3) Multiples, diviseurs d'un nombre

- Définitions

Soit deux entiers relatifs a et b.
S'il existe un entier k tel que $a = k \times b$, alors on peut dire que :

. a est un **multiple** de b
. a est **divisible par** a
. b est un **diviseur** de a (ou « b **divise** a »)

- Propriété

Soit trois entiers relatifs a, a' et b.
Si a et a' sont deux multiples de b, alors $a + a'$ est un multiple de b.

4) Nombres pairs, nombres impairs

- Définitions
  . Un nombre **pair** est un entier qui est divisible par 2.
  . Un nombre **impair** est un entier qui n'est pas divisible par 2.

- Propriété
  . Un entier est **pair** si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $\boxed{2k}$ (où $k \in \mathbb{Z}$).
  . Un entier est **impair** si et seulement s'il peut s'écrire sous la forme $\boxed{2k+1}$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

5) Critères de divisibilité

Soit n un nombre entier écrit sous forme décimale.
. n est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
. n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
. n est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
. n est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 5.
. n est divisible par 6 si et seulement s'il est à la fois divisible par 2 et par 3.
. n est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

6) Nombres premiers dans ℕ

- Définitions

  Un **nombre premier** est un entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

- Exemples
  . 0 n'est pas un nombre premier car il n'est pas divisible par lui-même (rappel : on ne peut pas diviser par 0)
  . 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur (lui-même).
  . Les premiers nombres premiers sont : 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , 43 , 47, ...
  . 8 n'est pas un nombre premier car il a plus que deux diviseurs (il en a exactement quatre : 1, 2, 4 et 8).

7) Décomposition en produit de facteurs premiers

- Propriété : Tout entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers

  Rq : cette décomposition est unique

- exemple : . $12 = 2^2 \times 3$
  . $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

8) Fraction irréductible

- Définitions

  Une fraction est **irréductible** si et seulement si son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autres diviseurs commun que 1.

- Méthode pour rendre une fraction irréductible

  On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers, puis on simplifie.

- Exemples :

  . $\frac{12}{300} = \frac{2^2\times3}{2^2\times3\times5^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

  . $\frac{2772}{594} = \frac{2^2\times3^2\times7\times11}{2\times3^2\times11} = \frac{2\times7}{3} = \frac{14}{3}$