ÉNONCÉS

Ex. 3 Comment choisir le nombre entier relatif n pour que n divise $n+12$?

Ex. 4 Déterminer les nombres entiers naturels n pour lesquels $5n+7$ est un diviseur de $2n+16$.

Ex. 5 Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que $(x-1)^2 \times y = 18$.

Ex. 6 a) Déterminer les nombres entiers naturels n et m tels que $(2n-3)(4n-13)m = 15$.

b) En déduire, sans calcul supplémentaire, un couple de nombres entiers naturels tels que $(2n-3)(4n-13)m = 45$.

Ex. 8 Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

a) $a = 2\,006$; $b = 11$.
b) $a = 1321$; $b = 9$.
c) $a = -1321$; $b = 9$.
d) $a = -423$; $b = 11$.

Ex. 9 1) Vérifier que $197\,719 = 341 \times 578 + 621$.

2) Effectuer, sans utiliser la calculatrice, la division euclidienne de :

a) $197\,719$ par 341.
b) $197\,719$ par 578.
c) $-197\,719$ par 578.
d) $-197\,719$ par 341.

Ex. 10 Le nombre n désigne un entier naturel. Le reste dans la division euclidienne de n par 144 est 67.
Quel est le reste dans la division euclidienne de n :
a) par 72 ? b) par 36 ? c) par 18 ?

Ex. 11 Déterminer tous les nombres entiers naturels qui, divisés par 7, donnent un quotient égal au reste.

Ex. 12 n désigne un nombre entier naturel, $n \geq 2$.
Déterminer le reste dans la division euclidienne de $4n-3$ par $2n+1$.

Ex. 13 n désigne un nombre entier naturel.
$a = 2n^2 + 12n + 22$; $b = n+2$; $c = 2n+5$.
On souhaite déterminer les restes dans les divisions euclidiennes de a par b et de a par c.

a) Émettre deux conjectures avec un tableur.
b) Démontrer que b divise $a-6$.
Conclure sur la première conjecture.
c) Vérifier que : $a = (2n+5)(n+3) + n + 7$.
Conclure sur la seconde conjecture.

Ex. 14 n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.
On utilisera un raisonnement par disjonction de cas en envisageant 3 cas :
. $n = 3k$. $n = 3k+1$. $n = 3k+2$
avec $k \in \mathbb{N}$

CORRIGÉ

Exercice 3

- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que n divise $n+12$.
  . n divise n
  . n divise $n+12$
  Alors n divise toute combinaison linéaire de n et $n+12$; en particulier, n divise $(-n)+(n+12)$ c'est-à-dire 12.

Donc n divise 12.

Or les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 12 sont : -12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.

Donc s'il existe un entier relatif n tel que n divise $n+12$, alors n est forcément égal à l'une ou plusieurs de ces 12 valeurs.

- **Réciproquement** (étude des cas)

valeurs de n	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
valeurs de $n+12$	0	6	8	9	10	11	13	14	15	16	18	24
divisibilité de $n+12$ par n ?	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

- **Conclusion**

> Il y a 12 entiers relatifs n tels que n divise $n+12$: -12 ; -6 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.

Remarque

Pour démontrer la réciproque, on peut éviter ici l'étude de cas et faire une démonstration « directe » :

Supposons que n divise 12
(montrons alors qu'il divise $n+12$)
n divise n et n divise 12 ; alors n divise toute combinaison linéaire de n et 12 ;
en particulier, n divise $n+12$.

Exercice 4

- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $5n+7 \mid 2n+16$.

  . $5n+7$ divise $5n+7$
  . $5n+7$ divise $2n+16$

  Alors $5n+7$ divise toute combinaison linéaire de $5n+7$ et $2n+16$; en particulier, $5n+7$ divise $-2(5n+7)+5(2n+16)$ c'est-à-dire 66.

  Donc $5n+7 \mid 66$

  Décomposition en produit de facteurs premiers : $66 = 2\times3\times11$

  Les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 66 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 22 ; 33 et 66.
  (on élimine les diviseurs négatifs car $n \in \mathbb{N}$ d'où $5n+7 \in \mathbb{N}$)

  Donc s'il existe un entier relatif n tel que $5n+7 \mid 2n+16$, alors n est forcément égal à l'une ou plusieurs de ces 8 valeurs.

- **Réciproquement** (étude des cas)

valeurs de $5n+7$	1	2	3	6	11	22	33	66
valeurs de n	$-6/5$	-1	$-4/5$	$-1/5$	$4/5$	3	5,2	11,8
valeurs de $2n+16$	/	/	/	/	/	22	/	/

- **Conclusion**

> Il y a un unique entier naturel n tel que $5n+7$ est un diviseur de $2n+16$: 3

Exercice 5

On cherche les nombres entiers relatifs x et y tels que $(x-1)^2 \times y = 18$.

$(x-1)^2$ et y sont des entiers, diviseurs associés de 18.
Et les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 18 sont : -18 ; -9 ; -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18.
Or $(x-1)^2$ est un carré d'entier ; donc les seules valeurs possibles pour $(x-1)^2$ sont 1 et 9.

- 1^er cas : si $(x-1)^2 = 1$

  Alors . $y = 18$
  . $x-1=1$ ou $x-1=-1$
  $x=2$ ou $x=0$

- 2^nd cas : si $(x-1)^2 = 9$

  Alors . $y = 2$
  . $x-1=3$ ou $x-1=-3$
  $x=4$ ou $x=-2$

Conclusion :

> Il y a exactement 4 couples d'entiers relatifs $(x;y)$ tels que $(x-1)^2 \times y = 18$: $(0;18)$, $(2;18)$, $(-2;2)$ et $(4;2)$.

Exercice 6

a) On cherche les couples d'entiers naturels $(n\,;m)$ tels que $(2n-3)(4n-13)m=15$.

$(2n-3)$, $(4n-13)$ et m sont des entiers, diviseurs associés de 15. Et les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 15 sont : -15 ; -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 et 15.

valeurs de $2n-3$	-15	-5	-3	-1	1	3	5	15
valeurs de n	-6	-1	0	1	2	3	4	9
valeurs de $4n-13$	-37	-17	-13	-9	-5	-1	3	47
valeurs de m	/	/	/	/	-3	-5	1	/

Conclusion :

Il y a un unique couple d'entiers naturels $(n\,;m)$ tels que $(2n-3)(4n-13)m=15$: $(4;1)$.

b) On cherche un couple d'entiers naturels $(n\,;m)$ tels que $(2n-3)(4n-13)m=45$.

D'après la question a) :
$(2\times\mathbf{4}-3)(4\times\mathbf{4}-13)\times\mathbf{1}=15$
D'où : $(2\times\mathbf{4}-3)(4\times\mathbf{4}-13)\times\mathbf{1}\times3 = 15\times3$
$(2\times\mathbf{4}-3)(4\times\mathbf{4}-13)\times\mathbf{3} = 45$

Donc un couple d'entiers naturels $(n\,;m)$ tels que $(2n-3)(4n-13)m=45$ est $(4\,;3)$.

Exercice 8

a) $2\,006=11\times182+4$ avec $0\le4<11$
Donc dans la division euclidienne de 2 006 par 11, le quotient est 182 et le reste est 4.

b) $1321=9\times146+7$ avec $0\le7<9$
Donc dans la division euclidienne de 1 321 par 9, le quotient est 146 et le reste est 7.

c) On a vu que $1321=9\times146+7$; d'où : $-1321=9\times(-146)-7$
$-1321=9\times(-146)-9+2$
$-1321=9\times(-146-1)+2$
$-1321=9\times(-147)+2$ avec $0\le2<9$

Donc dans la division euclidienne de –1 321 par 9, le quotient est –147 et le reste est 2.

d) $-423=11\times(-39)+6$ avec $0\le6<11$
Donc dans la division euclidienne de –423 par 11, le quotient est –39 et le reste est 6.

Exercice 9

1) À la calculatrice, on vérifie :
$197\,719=341\times578+621$

2) a) $197\,719=341\times578+621$
$197\,719=341\times578+341+280$
$197\,719=341\times579+280$ avec $0\le280<341$

Donc dans la division euclidienne de 197 719 par 341, le quotient est 579 et le reste est 280.

b) $197\,719=578\times341+621$
$197\,719=578\times341+578+43$
$197\,719=578\times342+43$ avec $0\le43<578$

Donc dans la division euclidienne de 197 719 par 578, le quotient est 342 et le reste est 43.

c) $197\,719=578\times341+621$
$-197\,719=578\times(-341)-621$
$-197\,719=578\times(-341)+578\times(-2)+535$
$-197\,719=578\times(-343)+535$ avec $0\le535<578$

Donc dans la division euclidienne de –197 719 par 578, le quotient est –343 et le reste est 535.

d) $-197\,719=341\times(-578)-621$
$-197\,719=341\times(-578)+341\times(-2)+61$
$-197\,719=341\times(-580)+61$ avec $0\le61<341$

Donc dans la division euclidienne de –197 719 par 341, le quotient est –580 et le reste est 61.

Exercice 10

a) $n = 144 \times q + 67$

donc $n = 72 \times (2q) + 67$ avec $0 \leq 67 < 72$

Donc dans la division euclidienne de n par 72, le quotient est $2q$ et <u>le reste est 67</u>.

b) $n = 144 \times q + 67$

Donc : $n = 36 \times (4q) + 67$

$n = 36 \times (4q) + 36 + 31$

$n = 36 \times (4q+1) + 31$ avec $0 \leq 31 < 36$

Donc dans la division euclidienne de n par 36, le quotient est $(4q+1)$ et <u>le reste est 31</u>.

c) $n = 144 \times q + 67$

Donc : $n = 18 \times (8q) + 67$

$n = 18 \times (8q) + 18 \times 3 + 13$

$n = 18 \times (8q+3) + 13$ avec $0 \leq 13 < 18$

Donc dans la division euclidienne de n par 18, le quotient est $(8q+3)$ et <u>le reste est 13</u>.

Exercice 11

$n = 7q + q$ avec $0 \leq q < 7$

$n = 8q$ avec $0 \leq q < 7$

Les nombres cherchés sont les 7 premiers multiples positifs de 8 :
0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 et 48.

Exercice 12

Établissons une conjecture :

	A	B	C	D
1	n	4n-3	2n+1	reste
2	0	-3	1	0
3	1	1	3	1
4	2	5	5	0
5	3	9	7	2
6	4	13	9	4
7	5	17	11	6
8	6	21	13	8
9	7	25	15	10
10	8	29	17	12
11	9	33	19	14
12	10	37	21	16
13	11	41	23	18
14	12	45	25	20

Pour $n = 0$ et $n = 1$, le reste dans la division euclidienne de $4n-3$ par $2n+1$ vaut n.

Pour $n \geq 2$, il semble que le reste vaut $2n-4$.

Démontrons-le.

Pour tout entier n : $4n-3 = (2n+1) \times 1 + 2n - 4$

$2n-4$ est le reste dans la division euclidienne de $4n-3$ par $2n+1$ si et seulement si :

$0 \leq 2n-4 < 2n+1$

c'est-à-dire $-2n \leq -4 < 1$

$2n \geq 4 > 1$

$n \geq 2$

Exercice 13

$a = 2n^2 + 12n + 22$; $b = n+2$; $c = 2n+5$.

On souhaite déterminer les restes dans les divisions euclidiennes de a par b et de a par c.

Établissons une conjecture :

n	a	b	c	reste dans a par b	reste dans a par c
0	22	2	5	0	2
1	36	3	7	0	1
2	54	4	9	2	0
3	76	5	11	1	10
4	102	6	13	0	11
5	132	7	15	6	12
6	166	8	17	6	13
7	204	9	19	6	14
8	246	10	21	6	15
9	292	11	23	6	16
10	342	12	25	6	17
11	396	13	27	6	18
12	454	14	29	6	19
13	516	15	31	6	20
14	582	16	33	6	21
15	652	17	35	6	22
16	726	18	37	6	23
17	804	19	39	6	24
18	886	20	41	6	25
19	972	21	43	6	26
20	1062	22	45	6	27

a) 1ère conjecture :

. dans la division euclidienne a par b, le reste est 6 pour tout $n \geq 5$

. De plus : $b \mid a$ pour $n \in \{0;1;4\}$

2nde conjecture :

dans la division euclidienne a par c, le reste est $n+7$ pour tout $n \geq 3$

b) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} a-6 &= 2n^2 + 12n + 22 - 6 \\ &= 2n^2 + 12n + 16 \\ &= 2(n^2 + 6n + 8) \\ &= 2\left[(n+3)^2 - 9 + 8\right] \\ &= 2(n+3-1)(n+3+1) \\ &= (n+2)(2n+8) \\ &= b(2n+8) \end{aligned}$$

Donc $b \mid a-6$

Pour tout entier naturel n :

$a - 6 = b(2n+8)$

d'où $a = b(2n+8) + 6$

Dans la division euclidienne de a par b, 6 est le reste si et seulement si $0 \leq 6 < b$,

c'est-à-dire :

$6 < n+2$

$6 - 2 < n$

$n > 4$

Ce qui démontre la première conjecture.

c) Pour tout entier naturel n :

$(2n+5)(n+3)+n+7=...=2n^2+12n+22$

Donc $a=c\times(n+3)+(n+7)$

Dans la division euclidienne de a par c, $n+7$ est le reste si et seulement si $0\leq n+7<c$,

c'est-à-dire : $0\leq n+7<2n+5$

$7-5<2n-n$

$n>2$

Ce qui démontre la seconde conjecture.

Exercice 14

$n(n+2)(n+4)$

D'après la propriété du cours, tout entier n s'écrit sous une, et une seule, des formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ (où $k\in\mathbb{Z}$).

. 1er cas : $n=3k$

$n(n+2)(n+4)=3k(3k+2)(3k+4)$

Donc $n(n+2)(n+4)$ est de la forme $3q$ avec $q=k(3k+2)(3k+4)$

. 2ème cas : $n=3k+1$

$n(n+2)(n+4)=(3k+1)((3k+1)+2)((3k+1)+4)$

$n(n+2)(n+4)=(3k+1)(3k+3)(3k+5)$

$n(n+2)(n+4)=(3k+1)3(k+1)(3k+5)$

$n(n+2)(n+4)=3(3k+1)(k+1)(3k+5)$

Donc $n(n+2)(n+4)$ est de la forme $3q$ avec $q=(3k+1)(k+1)(3k+5)$

. 3ème cas : $n=3k+2$

$n(n+2)(n+4)=(3k+2)((3k+2)+2)((3k+2)+4)$

$n(n+2)(n+4)=(3k+2)(3k+4)(3k+6)$

$n(n+2)(n+4)=(3k+2)(3k+4)3(k+2)$

$n(n+2)(n+4)=3(3k+2)(3k+4)(k+2)$

Donc $n(n+2)(n+4)$ est de la forme $3q$ avec $q=(3k+2)(3k+4)(k+2)$

. Conclusion : pour tout entier naturel n : $n(n+2)(n+4)$ s'écrit forcément sous la forme $3q$, donc $n(n+2)(n+4)$ est divisible par 3.