ÉNONCÉS

17 Quelle heure indique l'horloge :
a) 113 heures après avoir indiqué 2 heures ?
b) 156 heures avant d'indiquer 6 heures ?

18 n désigne un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Dans chaque cas, dire pour quelles valeurs de n la proposition est vraie.
a) $27 \equiv 5\ [n]$ **b)** $1\,000 \equiv 1\ [n]$ **c)** $121 \equiv 0\ [n]$

19 Dans chaque cas, simplifier la congruence.
a) $a \equiv 30\,757\ [10]$ **b)** $b = 15\,163\ [9]$

20 n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

21 Démontrer que si le nombre entier naturel n n'est pas divisible par 3, alors 9 divise $n^6 - 1$.

22 Quel est le reste dans la division euclidienne de $12^{1\,527}$ par 5 ?

23 Démontrer que :
$1^{2\,013} + 2^{2\,013} + 3^{2\,013} + 4^{2\,013}$
est divisible par 5.

CORRIGÉ

Exercice 17

a) On cherche la DE de 113 par 12 : $113 = 12 \times ? + ?$

$\rightarrow 113 = 12 \times 9 + 5$ avec $0 \leq 5 < 12$

Donc 113 correspond à 9 tours et 5/12 de tour. Donc $\boxed{\text{l'horloge indique « 7 heures »}}$

b) $156 = 12 \times 13 + 0$

Donc 156 correspond à exactement 13 tours. Donc $\boxed{\text{l'horloge indiquait « 6 heures »}}$

Exercice 18

a) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$27 \equiv 5\ [n] \Leftrightarrow 27-5 \equiv 5-5\ [n]$$
$$\Leftrightarrow 22 \equiv 0\ [n]$$
$$\Leftrightarrow 22 \text{ est divisible par } n$$
$$\Leftrightarrow n \mid 22$$
$$\Leftrightarrow n \in \{\ 2\ ;\ 11\ ;\ 22\ \}$$

Donc **la proposition $27 \equiv 5\ [n]$ est vraie pour exactement trois valeurs de n : 2 ; 11 et 22.**

b) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$1000 \equiv 1\ [n] \Leftrightarrow 1000-1 \equiv 1-1\ [n]$$
$$\Leftrightarrow 999 \equiv 0\ [n]$$
$$\Leftrightarrow 999 \text{ est divisible par } n$$
$$\Leftrightarrow n \mid 999$$
$$\Leftrightarrow n \mid 3^3 \times 37$$
$$\Leftrightarrow n \in \{\ 3\ ;\ 9\ ;\ 27\ ;\ 37\ ;\ 111\ ;\ 333\ ;\ 999\ \}$$

Donc **la proposition $1000 \equiv 1\ [n]$ est vraie pour exactement sept valeurs de n : 3 ; 9 ; 27 ; 37 ; 111 ; 333 et 999.**

c) Pour tout entier $n \geq 2$:

$$121 \equiv 0\ [n] \Leftrightarrow n \mid 121$$
$$\Leftrightarrow n \mid 11^2$$
$$\Leftrightarrow n \in \{\ 11\ ;\ 121\ \}$$

Donc **la proposition $121 \equiv 0\ [n]$ est vraie pour exactement deux valeurs de n : 11 et 121.**

Exercice 19

Remarque : il est demandé ici de « simplifier les congruences ». Cela revient à chercher le reste dans la division euclidienne.

a) $a \equiv 30\,157 \ [10]$

Or la division euclidienne de 30 757 par 10 est : $30\,157 = 10 \times 3\,075 + 7$

D'où $30\,157 \equiv 7 \ [10]$

Donc : $\boxed{a \equiv 7 \ [10]}$

b) $b \equiv 15\,163 \ [9]$

Or la division euclidienne de 15 163 par 9 est : $15\,163 = 9 \times 1\,684 + 7$

D'où $15\,163 \equiv 7 \ [9]$

Donc : $\boxed{b \equiv 7 \ [9]}$

Exercice 20

On veut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$6 \mid n(n+1)(2n+1)$

On va utiliser une disjonction de cas :

. $n = 6k$ c'est-à-dire $n \equiv 0\,[6]$

. $n = 6k+1$ c'est-à-dire $n \equiv 1\,[6]$

. $n = 6k+2$ c'est-à-dire $n \equiv 2\,[6]$

. $n = 6k+3$ c'est-à-dire $n \equiv 3\,[6]$

. $n = 6k+4$ c'est-à-dire $n \equiv 4\,[6]$

. $n = 6k+5$ c'est-à-dire $n \equiv 5\,[6]$

- 1er cas : $n \equiv 0 \ [6]$

  . On a donc : $n+1 \equiv 0+1 \ [6]$
  $n+1 \equiv 1 \ [6]$

  . On a aussi : $2n+1 \equiv 2\times 0+1 \ [6]$
  $2n+1 \equiv 1 \ [6]$

  Donc par multiplication des congruences :
  $n(n+1)(2n+1) \equiv 0\times1\times1 \ [6]$
  $\equiv 0 \ [6]$

  Donc : $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

- 2ème cas : $n \equiv 1 \ [6]$

  . On a donc : $n+1 \equiv 1+1 \ [6]$
  $n+1 \equiv 2 \ [6]$

  . On a aussi : $2n+1 \equiv 2\times1+1 \ [6]$
  $2n+1 \equiv 3 \ [6]$

  Donc par multiplication des congruences :
  $n(n+1)(2n+1) \equiv 1\times2\times3 \ [6] \equiv 6 \ [6]$
  $\equiv 0 \ [6]$

  Donc : $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

- 3ème cas : $n \equiv 2 \ [6]$

  $n(n+1)(2n+1) \equiv 2\times3\times5 \ [6] \equiv 30 \ [6]$
  $\equiv 0 \ [6]$

  Donc : $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

- Etc. etc.

Exercice 21

$9 \mid n^6 - 1$?

Dans la division euclidienne par 9, il y a neuf restes possibles : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8.
Parmi ceux-ci, trois sont divisibles par 3 : 0 ; 3 et 6.

On en déduit que :
n non divisible par 3 $\Leftrightarrow$ $n \equiv 1\ [9]$ ou $n \equiv 2\ [9]$ ou $n \equiv 4\ [9]$ ou $n \equiv 5\ [9]$ ou $n \equiv 7\ [9]$ ou $n \equiv 8\ [9]$

- <u>1er cas</u> : $n \equiv 1\ [9]$ (cas où n s'écrit $9k+1$)

On a donc : $n^6 \equiv 1^6\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 1\ [9]$
$\Rightarrow n^6 - 1 \equiv 1-1\ [9]$
$\Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0\ [9]$
$\Rightarrow 9 \mid n^6 - 1$

- <u>2ème cas</u> : $n \equiv 2\ [9]$ (cas où n s'écrit $9k+2$)

On a donc : $n^6 \equiv 2^6\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 64\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 9\times 7+1\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 1\ [9]$
$\Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0\ [9]$
$\Rightarrow 9 \mid n^6 - 1$

Autre méthode :
On a : $n^6 \equiv 2^6\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 64\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 8\times 8\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv (-1)\times(-1)\ [9]$
$\Rightarrow n^6 \equiv 1\ [9]$
$\Rightarrow n^6 - 1 \equiv 0\ [9]$

- <u>3ème cas</u> : $n \equiv 4\ [9]$
  …….

- <u>Etc. etc.</u>

Exercice 23

$1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013} \equiv 0\ [5]$?

On a : $3 \equiv -2\ [5]$ et $4 \equiv -1\ [5]$

Donc : $1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013} \equiv 1^{2013}+2^{2013}+(-2)^{2013}+(-1)^{2013}\ [5]$
$\equiv 1^{2013}+(-1)^{2013}+2^{2013}+(-2)^{2013}\ [5]$
$\equiv 1-1+2^{2013}-2^{2013}\ [5]$
$\equiv 0\ [5]$

Exercice 22

Reste dans la division euclidienne de 12^{1527} *par 5 ?*

<u>Problématique</u> *: la plupart des calculatrices n'ont pas une puissance suffisante pour trouver le résultat.*

→ *on va tester les premières puissances de 12 en espérant en trouver une qui soit congrue à 0 ou 1 ou* -1.

On conjecture : $12^1 \equiv 12\ [5] \equiv 2\ [5]$

$12^2 \equiv 144\ [5] \equiv 4\ [5]$

$12^3 \equiv 1728\ [5] \equiv 3\ [5]$

$12^4 \equiv 20736\ [5] \equiv 1\ [5]$

→ *Stratégie : faire « apparaître » des* 12^4 *dans notre* 12^{1527}

On a : $12^{1527} = 12^{4\times381+3}$

$= \left(12^4\right)^{381} \times 12^3$

Or : . $12^4 \equiv 1\ [5] \Rightarrow \left(12^4\right)^{381} \equiv 1^{381}\ [5] \equiv 1\ [5]$

. $12^3 \equiv 3\ [5]$ *(voir dans conjecture)*

Donc : $\left(12^4\right)^{381} \times 12^3 \equiv 1\times3\ [5]$. Et donc : $\left(12^4\right)^{381} \times 12^3 \equiv 3\ [5]$

Or $0 \leq 3 < 5$

Donc : $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 12^{1527} \text{ par 5 est égal à 3.}}$

<u>Autre méthode</u> :

On a vu que : $12^2 \equiv 4\ [5]$

Donc $12^2 \equiv -1\ [5]$

Or $12^{1527} = 12^{2\times763+1} = \left(12^2\right)^{763} \times 12$

$\Rightarrow \left(12^2\right)^{763} \times 12 \equiv -1\times12\ [5]$

$\Rightarrow \left(12^2\right)^{763} \times 12 \equiv -12\ [5]$

$\Rightarrow \left(12^2\right)^{763} \times 12 \equiv 3\ [5]$

Donc : $12^{1527}\ [5] \equiv 3\ [5]$

Or $0 \leq 3 < 5$

Donc : $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 12^{1527} \text{ par 5 est égal à 3.}}$

<u>Autre méthode</u> :

On a : $12 \equiv 2\ [5]$

Donc $12^{1527} \equiv 2^{1527}\ [5]$

Conjecture : $2^2 \equiv 4\ [5] \equiv -1\ [5]$

Or $2^{1527} = \left(2^2\right)^{763} \times 2$

$\Rightarrow 2^{1527} \equiv \left(2^2\right)^{763} \times 2\ [5] \equiv (-1)^{763} \times 2\ [5]$

$\Rightarrow 2^{1527} \equiv -2\ [5] \equiv 3\ [5]$

Donc : $12^{1527}\ [5] \equiv 3\ [5]$

Or $0 \leq 3 < 5$

Donc : $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 12^{1527} \text{ par 5 est égal à 3.}}$