## ÉNONCÉS

**Ex. 27** Un fleuriste a reçu 1 788 roses blanches et 1 464 roses rouges. Il veut réaliser des bouquets identiques (même nombre de fleurs, même type de fleurs) en utilisant toutes les fleurs. Comment l'aider ?

**Ex. 28** Déterminer, à la main, le PGCD des deux nombres entiers relatifs suivants :

a) 1 386 et 1 180
b) – 6 292 et 5 852

**Ex. 29** $a = n^2 + 3n$ et $b = n^2 + 5n + 6$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $\text{PGCD}(n, n+2)$ selon la parité de $n$.
b) Factoriser $a$ et $b$.
c) Exprimer $\text{PGCD}(a, b)$ en fonction de $n$.

**Ex. 30** Trouver les nombres entiers naturels non nuls $a$ tels que $a < 336$ et $\text{PGCD}(336, a) = 28$.

## CORRIGÉ

### Exercice 27

Calculons le PGCD de 1788 et 1464.

. On peut calculer $\text{PGCD}(1788, 1464)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$$1788 = 1464 \times 1 + 324$$
$$1464 = 324 \times 4 + 168$$
$$324 = 168 \times 1 + 156$$
$$168 = 156 \times 1 + 12$$
$$156 = 12 \times 13 + 0$$

Le dernier diviseur est 12, donc $\text{PGCD}(1788, 1464) = 12$.

. Autre méthode : avec la décomposition en produit de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 1788 & 2 \\ 894 & 2 \\ 447 & 3 \\ 149 & 149 \\ 1 & \end{array}$$

donc $1788 = 2^2 \times 3 \times 149$

$$\begin{array}{r|l} 1464 & 2 \\ 732 & 2 \\ 366 & 3 \\ 122 & 2 \\ 61 & 61 \\ 1 & \end{array}$$

donc $1464 = 2^3 \times 3 \times 61$

D'où : $\text{PGCD}(1788, 1464) = 2^2 \times 3 = 12$

Or $\dfrac{1788}{12} = 149$ et $\dfrac{1464}{12} = 122$.

Par conséquent :

$\boxed{\text{on peut faire 12 bouquets identiques contenant chacun 149 roses blanches et 122 roses rouges.}}$

## Exercice 28

a) PGCD de 1 386 et 1 180

. On peut calculer $\mathrm{PGCD}(1386,1180)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$$1386 = 1180\times 1 + 206$$
$$1180 = 206\times 5 + 150$$
$$206 = 150\times 1 + 56$$
$$150 = 56\times 2 + 38$$
$$56 = 38\times 1 + 18$$
$$38 = 18\times 1 + 2$$
$$18 = 2\times 9 + 0$$

Le dernier diviseur est 2, donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(1386,1180)=2}$ .

. Autre méthode : avec la décomposition en produit de facteurs premiers

$$1386 = 2\times 3^2\times 7\times 11$$
$$1180 = 2^2\times 5\times 59$$

Donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(1386,1180)=2}$

b) PGCD de – 6 292 et 5 852

$\mathrm{PGCD}(-6292,5852)=\mathrm{PGCD}(6292,5852)$

. On peut calculer $\mathrm{PGCD}(6292,5852)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$$6292 = 5852\times 1 + 440$$
$$5852 = 440\times 13 + 132$$
$$440 = 132\times 3 + 44$$
$$132 = 44\times 3 + 0$$

Le dernier diviseur est 44, donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(-6292,5852)=44}$ .

. Autre méthode : avec la décomposition en produit de facteurs premiers

$$-6292 = -2^2\times 11^2\times 13$$
$$5852 = 2^2\times 7\times 11\times 19$$

D'où :

$\mathrm{PGCD}(-6292\ ,5852)=2^2\times 11=44$

## Exercice 29

$a=n^2+3n$ et $b=n^2+5n+6$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

a) Soit $d$ le PGCD de $n$ et $n+2$.

$d=\mathrm{PGCD}(n,n+2)$

$d$ divise $n$ et $n+2$, donc $d$ divise toute combinaison linéaire de $n$ et $n+2$, en particulier : $n+2-n$ c'est-à-dire : $2$.

On a donc : $d\,|\,2$

Donc $d=1$ ou $d=2$.

1^er^ cas : si $n$ est pair alors $2\,|\,n$ et $2\,|\,n+2$ donc 2 est un diviseur commun à $n$ et $n+2$.

Donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(n,n+2)=2}$

2^ème^ cas : si $n$ est impair alors $n$ et $n+2$ sont impairs. Sachant que $d=\mathrm{PGCD}(n,n+2)$ alors $d$ ne peut pas être égal à 2 puisque 2 ne divise aucun entier impair.

Donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(n,n+2)=1}$

b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

. $a=n^2+3n=n(n+3)$

. $b=n^2+5n+6$

$$b=n^2+2\times n\times\frac{5}{2}+6$$
$$b=n^2+2\times n\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6$$
$$b=\left(n+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+\frac{24}{4}=\left(n+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$
$$b=\left(n+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$b=\left(n+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$\boxed{b=(n+2)(n+3)}$$

c) $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(n(n+3),(n+2)(n+3))$

$\mathrm{PGCD}(a,b)=(n+3)\times\mathrm{PGCD}(n,n+2)$

1^er^ cas : si $n$ est pair alors $\mathrm{PGCD}(n,n+2)=2$

Par conséquent : $\mathrm{PGCD}(a,b)=(n+3)\times 2$

Donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(a,b)=2(n+3)}$

2^ème^ cas : si $n$ est impair alors $\mathrm{PGCD}(n,n+2)=1$

Par conséquent : $\mathrm{PGCD}(a,b)=(n+3)\times 1$

Donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(a,b)=n+3}$

## Exercice 30

$a<336$ et $\mathrm{PGCD}(336,a)=28$

. 28 est un diviseur de $a$ donc il existe un entier naturel $k$ tel que $a=28k$.

. $a<336$ équivaut $28k<336$

$$k<\frac{336}{28}$$
$$k<12$$

Donc $k\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$.

. $336=28\times 12$ ; $a=28\times k$

Donc $k$ ne peut être un multiple d'un diviseur de 12 autre que 1 car le $\mathrm{PGCD}(336,a)$ serait strictement supérieur à 28, ce qui n'est pas possible car on sait que $\mathrm{PGCD}(336,a)=28$.

Donc $k\in\{1;5;7;11\}$.

. On en déduit que :

$a\in\{28\times 1;28\times 5;28\times 7;28\times 11\}$

$a\in\{28;140;196;308\}$

On teste chacune de ces valeurs :

. $\mathrm{PGCD}(336,28)=28$
. $\mathrm{PGCD}(336,140)=28$
. $\mathrm{PGCD}(336,196)=28$
. $\mathrm{PGCD}(336,308)=28$

Donc

| |
|---|
| les valeurs de a cherchées sont : 28 ; 140 ; 196 et 308. |