## ÉNONCÉS

**Ex. 70** Déterminer le reste dans la division euclidienne :

a) de $14^{200}$ par 5.
b) de $11^{101}$ par 3.

**Ex. 71** $n$ désigne un nombre entier naturel.
Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne :

a) de $n^2$ par 5.
b) de $n^3$ par 7.

**Ex. 92** $n$ désigne un nombre entier naturel tel que $n \geq 2$.
$a = n^2 + 2n - 3$ et $b = n^2 + 4n + 3$

a) Factoriser $a$ et $b$.
b) Déterminer $\text{PGCD}(n-1, n+1)$ en distinguant les cas $n$ pair et $n$ impair.
c) Déterminer $\text{PGCD}(a, b)$ en fonction de $n$.

**Ex. 93** Déterminer les couples $(x, y)$ de nombres entiers naturels solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1902 \\ \text{PGCD}(x; y) = 317 \end{cases}$$

## CORRIGÉ

### Exercice 70

a) Reste dans la division euclidienne de $14^{200}$ par 5

On a : $14 \equiv 4 \; [5] \equiv -1 \; [5]$

D'où $14^{200} \equiv (-1)^{200} \; [5]$

$14^{200} \equiv 1 \; [5]$

Or $0 \leq 1 < 5$

Donc $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 14^{200} \text{ par 5 est égal à 1.}}$

b) Reste dans la division euclidienne de $11^{101}$ par 3

On a : $11 \equiv 2 \; [3] \equiv -1 \; [3]$

D'où $11^{101} \equiv (-1)^{101} \; [3]$

$11^{101} \equiv -1 \; [3]$

$11^{101} \equiv 2 \; [3]$

Or $0 \leq 2 < 3$

Donc $\boxed{\text{le reste dans la division euclidienne de } 11^{101} \text{ par 3 est égal à 2.}}$

### Exercice 71

a) Les restes possibles dans la division euclidienne de tout entier $n$ par 5 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4.

| $n \equiv \ldots \; [5]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n^2 \equiv \ldots \; [5]$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |

Donc $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } n^2 \text{ par 5 sont : 0 ; 1 ou 4.}}$

b) Les restes possibles dans la division euclidienne de tout entier $n$ par 7 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

| $n \equiv \ldots \; [7]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3 \equiv \ldots \; [7]$ | 0 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 |

Donc $\boxed{\text{les restes possibles dans la division euclidienne de } n^3 \text{ par 7 sont : 0 ; 1 ou 6.}}$

## Exercice 92

**a)** Pour tout entier naturel $n$ :

$a = n^2 + 2n - 3$

$a = n^2 + 2n + 1 - 4$

$a = (n+1)^2 - 4$

$a = (n+1)^2 - 2^2$

$a = (n+1-2)(n+1+2)$

$\boxed{a = (n-1)(n+3)}$

Pour tout entier naturel $n$ :

$b = n^2 + 4n + 3$

$b = n^2 + 4n + 4 - 1$

$b = (n+2)^2 - 1$

$b = (n+2)^2 - 1^2$

$b = (n+2-1)(n+2+1)$

$\boxed{b = (n+1)(n+3)}$

**b)** Soit $d = \text{PGCD}(n-1\,;n+1)$

Alors : $d$ divise $n-1$ et divise $n+1$ ;
donc $d$ divise toute combinaison linéaire de $n-1$ et $n+1$.
En particulier : $d$ divise $n+1-(n-1)$
C'est-à-dire : $d$ divise $2$
Donc $d=1$ ou $d=2$.

. Si $n$ est impair,
alors $n-1$ et $n+1$ sont tous les deux pairs,
donc 2 divise $n-1$ et $n+1$.
Donc $d=2$.
C'est-à-dire : $\boxed{\text{PGCD}(n-1\,;n+1)=2}$

. Si $n$ est pair,
alors $n-1$ et $n+1$ sont tous les deux impairs,
donc 2 ne divise pas $n-1$ et $n+1$.
Donc $d=1$.
C'est-à-dire : $\boxed{\text{PGCD}(n-1\,;n+1)=1}$

**c)** $\text{PGCD}\,(a\,;b) = \text{PGCD}\,(n^2+2n-3\ ;\ n^2+4n+3)$

$\text{PGCD}(a\,;b) = \text{PGCD}((n-1)(n+3)\ ;\ (n+1)(n+3))$

$\text{PGCD}(a\,;b) = (n+3)\text{PGCD}(n-1\ ;\ n+1)$

Par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{. si } n \text{ est impair, } \text{PGCD}(a\,;b)=(n+3) \\ \text{. si } n \text{ est pair, } \text{PGCD}(a\,;b)=2(n+3) \end{array}}$$

## Exercice 93

On cherche les couples $(x\,;y)$ solutions du système

$$\begin{cases} x+y=1902 \\ \text{PGCD}\,(x;y)=317 \end{cases}$$

$\text{PGCD}(x;y)=317$ si et seulement si il existe deux entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux tels que :

$$\begin{cases} x=317\,x' \\ y=317\,y' \end{cases}$$

Par conséquent :

$\begin{cases} x+y=1902 \\ \text{PGCD}\,(x;y)=317 \end{cases}$ si et seulement si il existe

deux entiers naturels $x'$ et $y'$ premiers entre eux

tels que :

$$\begin{cases} x+y=1902 \\ x=317\,x' \\ y=317\,y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 317\,x'+317\,y'=1902 \\ x=317\,x' \\ y=317\,y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'+y'=6 \\ x=317\,x' \\ y=317\,y' \end{cases}$$

Les couples $(x'\,;y')$ possibles d'entiers naturels premiers entre eux et dont la somme est égale à 6 sont : $(1\,;5)$ et $(5\,;1)$.

$317\times 5=1585$

On en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{le système possède exactement deux couples} \\ (x\,;y) \text{ solutions : } (317\,;1585) \text{ et } (1585\,;317). \end{array}}$$