TS.Spé - Évaluation n° 1 de mathématiques – *Énoncé* + CORRIGÉ

Exercice de spécialité maths de l'évaluation du lundi 7 octobre 2019 – Calculatrices interdites   version 1.2

Énoncé

Les 6 exercices suivants sont indépendants et peuvent être traitées séparément.

Exercice 1

1. Calculer le nombre $13\times 7+17$.

2. En déduire :
a) le quotient et le reste dans la division euclidienne de 108 par 13 ;
b) le quotient et le reste dans la division euclidienne de 108 par 7 ;
c) le quotient et le reste dans la division euclidienne de -108 par 13.

Exercice 2

a) Décomposer le nombre 126 en produit de facteurs premiers.
b) Donner tous les diviseurs positifs de 126.

Exercice 3

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $2n$.

Exercice 4

n désigne un nombre entier relatif. Démontrer que $\left(\frac{1}{3}n+1\right)(84-21n)$ est divisible par 7.

Exercice 5

n désigne un nombre entier relatif.
Démontrer que le nombre $N=n^2\left(n^2-1\right)$ est divisible par 4.
On pourra utiliser un raisonnement par disjonction de cas.

Exercice 6

n désigne un nombre entier naturel.
On souhaite déterminer le reste dans la division euclidienne de n^2+4n par $n+5$.

valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6
valeurs de n^2+4n	0	5					60
valeurs de $n+5$	5	6					
Reste dans la division euclidienne de n^2+4n par $n+5$	0	5					

1. a) Recopier et compléter le tableau suivant :
b) Quelle conjecture peut-on émettre ?

2. a) Montrer que pour tout n : $n^2+4n-5=(n-1)(n+5)$.
b) Démontrer la conjoncture trouvée à la question **1.**b).

CORRIGÉ

Exercice 1

1. $13\times 7+17=91+17=\boxed{108}$

2. a) $108=13\times 7+17$
d'où $108=13\times 7+13+4$
$108=13\times(7+1)+4$
$108=13\times 8+4$
Or $0\leq 4<13$
Donc dans la division euclidienne de 108 par 13, le quotient est 8 et le reste est 4.

b) $108=7\times 13+17$
d'où $108=7\times 13+7+7+3$
$108=7\times(13+2)+3$
$108=7\times 15+3$
Or $0\leq 3<7$
Donc dans la division euclidienne de 108 par 7, le quotient est 15 et le reste est 3.

c) $108=13\times 7+17$
d'où $-108=13\times(-7)-17$
$-108=13\times(-7)-13-13+9$
$-108=13\times(-9)+9$
Or $0\leq 9<13$
Donc dans la division euclidienne de -108 par 13, le quotient est -9 et le reste est 9.

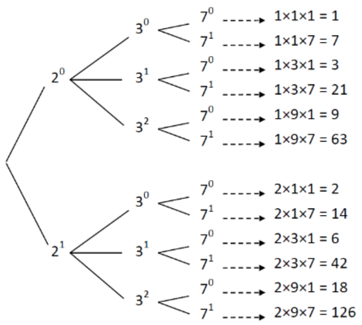
Exercice 2

a) Décomposit° de 360 en produit de facteurs premiers :

126	2
63	3
	3
7	7
1	

D'où $\boxed{126 = 2\times 3^2\times 7}$

b) $126 = 2\times 3^2\times 7$



Donc

> les diviseurs positifs de 126 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 9 ; 14; 18 ; 21 ; 42 ; 63 et 126.

Exercice 3

. Supposons qu'il existe un entier n tel que $n+1$ divise $2n$.

Or $n+1$ divise aussi $n+1$; donc si $n+1$ divise aussi $2n$,

alors d'après la propriété, $n+1$ divise toute combinaison linéaire de $2n$ et $n+1$, donc $n+1$ divise par exemple $2n\times(-1)+(n+1)\times 2$; c'est-à-dire : $n+1$ divise $-2n+2n+2$, c'est-à-dire : $n+1$ divise 2.

Or les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 2 sont : -2 ; -1 ; 1 et 2 .

. Réciproquement :

valeurs de $n+1$	-2	-1	1	2
valeurs de n	-3	-2	0	1
valeurs de $2n$	-6	-4	0	2
Divisibilité de $2n$ par $n+1$?	oui	oui	oui	oui

Par conséquent :

> les valeurs de n pour lesquelles $n+1$ divise $2n$ sont : -3 ; -2 ; 0 et 1.

Exercice 4

Pour tout entier n :

$$\begin{aligned}(1/3n+1)(84-21n) &= (1/3n+1)\times 21(4-n)\\ &= 21(1/3n+1)(4-n)\\ &= 7\times 3(1/3n+1)(4-n)\\ &= 7\times(3\times 1/3n+3)(4-n)\\ &= 7(n+3)(4-n)\end{aligned}$$

Or $(n+3)(4-n)$ est un entier.

> Donc $(1/3n+1)(84-21n)$ est divisible par 7 pour tout entier n.

Exercice 5

Effectuons un raisonnement par disjonction de cas.
D'après la propriété du cours, tout entier n s'écrit sous une, et une seule, des formes $4q$, $4q+1$, $4q+2$ ou $4q+3$ (où $q\in\mathbb{Z}$).

. 1[er] cas : $n = 4q$

$$N = n^2(n^2-1) = (4q)^2\left((4q)^2-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = 4\left[4q^2\left(16q^2-1\right)\right]$$

Or $4q^2\left(16q^2-1\right)$ est un entier. Donc N est divisible par 4.

. 2[ème] cas : $n = 4q+1$

$$N = n^2(n^2-1) = (4q+1)^2\left((4q+1)^2-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = (4q+1)^2\left(16q^2+8q+1-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = 4\left[(4q+1)^2\left(4q^2+2q\right)\right]$$

Or $(4q+1)^2\left(4q^2+2q\right)$ est un entier. Donc N est divis. par 4.

. 3[ème] cas : $n = 4q+2$

$$N = n^2(n^2-1) = (4q+2)^2\left((4q+2)^2-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = \left[2(2q+1)\right]^2\left((4q+2)^2-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = 4\left[(2q+1)^2\left((4q+2)^2-1\right)\right]$$

Or $(2q+1)^2\left((4q+2)^2-1\right)$ est un entier. Donc N est divis. par 4.

. 4[ème] cas : $n = 4q+3$

$$N = n^2(n^2-1) = (4q+3)^2\left((4q+3)^2-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = (4q+3)^2\left(16q^2+24q+9-1\right)$$
$$N = n^2(n^2-1) = 4\left[(4q+3)^2\left(4q^2+6q+2\right)\right]$$

Or $(4q+3)^2\left(4q^2+6q+2\right)$ est un entier. Donc N est divis. par 4.

. Conclusion :
Pour tout entier relatif n : le nombre $n^2\left(n^2-1\right)$ est divisible par 4.

. Remarque :
Ici, on peut aussi utiliser une disjonction des cas en distinguant le cas n pair et n impair :

. 1[er] cas : $n = 2q$

$$n^2\left(n^2-1\right) = (2q)^2\left((2q)^2-1\right)$$
$$n^2\left(n^2-1\right) = 4\left[\left(q^2\right)\left((2q)^2-1\right)\right]$$

. 2[ème] cas : $n = 2q+1$

$$n^2\left(n^2-1\right) = (2q+1)^2\left((2q+1)^2-1\right)$$
$$n^2\left(n^2-1\right) = (2q+1)^2\left(4q^2+4q+1-1\right)$$
$$n^2\left(n^2-1\right) = 4\left[(2q+1)^2\left(q^2+q\right)\right]$$

Exercice 6

1. a) Tableau complété :

valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6
valeurs de n^2+4n	0	5	12	21	32	45	60
valeurs de $n+5$	5	6	7	8	9	10	11
Reste dans la division euclidienne de n^2+4n par $n+5$	0	5	5	5	5	5	5

b)

> Dans la division euclidienne de n^2+4n par $n+5$, pour $n\geq 1$: le reste semble être 5.

2. a) Pour tout entier naturel n :

$$(n-1)(n+5) = n^2+5n-n-5$$
$$(n-1)(n+5) = n^2+4n-5$$

Remarque : on peut aussi utiliser la forme canonique du polynôme x^2+4x-5.

b) De la question précédente, on déduit que pour tout entier naturel n :

$$n^2+4n-5 = (n-1)(n+5)$$
$$n^2+4n = (n-1)(n+5)+5$$

Donc, pour $0\leq 5 < n+5$, c'est-à-dire pour $n > 0$:

> dans la division euclidienne de n^2+4n par $n+5$, le reste est 5.