Énoncé

TS Spé Maths – Archives – Corrigés

Les 6 exercices suivants sont indépendants et peuvent être traitées séparément.

Exercice 1

1. Calculer le nombre $7\times 23+19$.

2. En déduire :
a) le quotient et le reste dans la division euclidienne de 180 par 23 ;
b) le quotient et le reste dans la division euclidienne de 180 par 7 ;
c) le quotient et le reste dans la division euclidienne de -180 par 7.

Exercice 2

a) Décomposer le nombre 360 en produit de facteurs premiers.
b) Donner tous les diviseurs positifs impairs de 360.

Exercice 3

Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n+3$ divise $3n$.

Exercice 4

n désigne un nombre entier relatif.

Démontrer que $\left(6n^2+12\right)\left(28n-7\right)$ est divisible par 21.

Exercice 5

n désigne un nombre entier relatif.

Démontrer que $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3.

On pourra utiliser un raisonnement par disjonction de cas.

Exercice 6

Un entier naturel n est appelé « nombre puissant » lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

2. Soient a et b deux entiers naturels distincts et non nuls.
Montrer que l'entier naturel $n=a^2b^3$ est un nombre puissant.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. $7\times 23+19=161+19=180$.

2. a) $180=23\times 7+19$

Or $0\leq 19<23$

Donc $\boxed{\text{dans la division euclidienne de 180 par 23, le quotient est 7 et le reste est 19.}}$

b) $180=7\times 23+19$

d'où $180=7\times 23+19$

$180=7\times 23+7\times 2+5$

$180=7\times 25+5$

Or $0\leq 5<7$

Donc $\boxed{\text{dans la division euclidienne de 180 par 7, le quotient est 25 et le reste est 5.}}$

c) $180=7\times 23+19$

d'où $-180=7\times\left(-23\right)-19$

$-180=7\times\left(-23\right)+7\times\left(-3\right)+2$

$-180=7\times\left(-26\right)+2$

Or $0\leq 2<7$

Donc $\boxed{\text{dans la division euclidienne de } -180 \text{ par 7, le quotient est } -26 \text{ et le reste est 2.}}$

Exercice 2

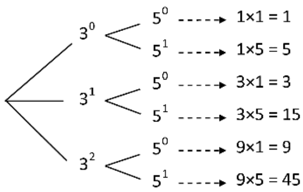
a) Décomposition du nombre 360 en produit de facteurs premiers :

360	5
	2
36	3
	2
6	3
2	2
1	

D'où $\boxed{360 = 2^3 \times 3^2 \times 5}$

b) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Si un nombre impair s'écrit sous la forme d'un produit d'entiers, alors tous ces entiers sont forcément impairs.
Donc les diviseurs pairs de 360 sont les produits de 1, 3 ou 3² avec 1 ou 5.



Par conséquent :

> les diviseurs positifs impairs de 360 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45.

Exercice 3

. Supposons qu'il existe un entier n tel que $2n+3$ divise $3n$.

Or $2n+3$ divise aussi $2n+3$; donc si $2n+3$ divise aussi $3n$,

alors d'après la propriété, $2n+3$ divise toute combinaison linéaire de $3n$ et $2n+3$, donc $2n+3$ divise par exemple $(2n+3)\times 3 - 3n \times 2$; c'est-à-dire : $2n+3$ divise $6n+9-6n$, c'est-à-dire : $2n+3$ divise 9.

Or les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 9 sont : -9 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 et 9 .

. Réciproquement :

valeurs de $2n+3$	-9	-3	-1	1	3	9
valeurs de n	-6	-3	-2	-1	0	3
valeurs de $3n$	-18	-9	-6	-3	0	9
divisibilité de $3n$ par $2n+3$?	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Par conséquent :

> les valeurs de n pour lesquelles $2n+3$ divise $3n$ sont : -6 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 et 3

Exercice 4

Pour tout entier n :

$$(6n^2+12)(28n-7) = 3(2n^2+4)7(4n-1) = 3\times 7(2n^2+4)(4n-1) = 21(2n^2+4)(4n-1)$$

Or $(2n^2+4)(4n-1)$ est un entier.

> Donc $(6n^2+12)(28n-7)$ est divisible par 21 pour tout entier n.

Exercice 5

D'après la propriété du cours, tout entier n s'écrit sous une, et une seule, des formes $3q$, $3q+1$ ou $3q+2$ (où $q \in \mathbb{Z}$).

. 1^er^ cas : $n = 3q$

$$n(n^2-1) = 3q\left((3q)^2-1\right)$$
$$n(n^2-1) = 3\times(9q^3-q)$$

Or $9q^3-q$ est un entier.
Par conséquent :
$n(n^2-1)$ est divisible par 3.

. 2^ème^ cas : $n = 3q+1$

$$n(n^2-1) = (3q+1)\left((3q+1)^2-1\right)$$
$$n(n^2-1) = (3q+1)(9q^2+6q+1-1)$$
$$n(n^2-1) = (3q+1)(9q^2+6q)$$
$$n(n^2-1) = (3q+1)(3\ (3q^2+2q))$$
$$n(n^2-1) = 3\ [(3q+1)(3q^2+2q)]$$

Or $(3q+1)(3q^2+2q)$ est un entier. Par conséquent :
$n(n^2-1)$ est divisible par 3.

. 3^ème^ cas : $n = 3q+2$

$$n(n^2-1) = (3q+2)\left((3q+2)^2-1\right)$$
$$n(n^2-1) = (3q+2)(9q^2+12q+4-1)$$
$$n(n^2-1) = (3q+2)(9q^2+12q+3)$$
$$n(n^2-1) = (3q+2)(3\ (3q^2+4q+1))$$
$$n(n^2-1) = 3\ [(3q+2)(3q^2+4q+1)]$$

Or $(3q+2)(3q^2+4q+1)$ est un entier. Donc :
$n(n^2-1)$ est divisible par 3.

. Conclusion :

> Pour tout entier relatif n : le nombre $n(n^2-1)$ est divisible par 3.

Exercice 6

1. $8 = 2^3$; l'unique diviseur premier de 8 est 2.
Or 2^2 divise 8.
Donc 8 est puissant.

$9 = 3^2$; l'unique diviseur premier de 9 est 3.
Or 3^3 divise 9.
Donc 9 est puissant.

Donc 8 et 9 sont deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

2. Soit p un diviseur premier de $n = a^2b^3 = a\times a\times b\times b\times b$.
Donc p est un diviseur premier de a ou de b .

. Si p est un diviseur premier de a , alors il existe un entier a' tel que $a = p\times a'$
donc n s'écrit :
$n = p^2\times a'^2\times ab^3$
donc p^2 divise n .

. Si p est un diviseur premier de b , alors il existe un entier b' tel que $b = p\times b'$
donc n s'écrit :
$n = a^2\left(p\times b'\right)^3 = p^2a^2pb'^3$
donc p^2 divise n .

. Conclusion :
$n = a^2b^3$ est puissant.