Énoncé

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. Démontrer que pour tout entier relatif n : $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3.
On utilisera et un raisonnement par disjonction de cas et les congruences.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 42^{41} par 5.

3. Déterminer les entiers n tels que $16 \equiv 1 \quad [n]$. .

4. a) Déterminer le PGCD de 420 et 660 de deux façons différentes :
- à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
- à l'aide des décompositions en produits de facteurs premiers.

b) En déduire la forme simplifiée de la fraction $N=\dfrac{420}{660}$.

5. Soit le nombre $A=n^2+5n+6$, où n est un entier.

a) Montrer que pour tout entier n, le nombre A est le produit de deux entiers.
b) En déduire que si n est un entier naturel, alors A n'est pas un nombre premier.
c) Déterminer les entiers n tel que A est un nombre premier.

CORRIGÉ

Question 1

Effectuons un raisonnement par disjonction des cas.

D'après la propriété du cours, tout entier relatif n vérifie une, et une seule, des congruences $n\equiv 0 \quad [3]$, $n\equiv 1 \quad [3]$ ou $n \equiv 2 \quad [3]$.

. <u>1^er^ cas</u> : $n\equiv 0 \quad [3]$

Alors : $n^2\equiv 0^2 \quad [3]$

$n^2\equiv 0 \quad [3]$

$n^2-1\equiv -1 \quad [3]$

Par conséquent : $n\left(n^2-1\right)\equiv 0\times(-1) \quad [3]$

$n\left(n^2-1\right)\equiv 0 \quad [3]$

Donc $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3

. <u>2^ème^ cas</u> : $n\equiv 1 \quad [3]$

Alors : $n^2\equiv 1^2 \quad [3]$

$n^2\equiv 1 \quad [3]$

$n^2-1\equiv 0 \quad [3]$

Par conséquent : $n\left(n^2-1\right)\equiv 1\times 0 \quad [3]$

$n\left(n^2-1\right)\equiv 0 \quad [3]$

Donc $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3

. <u>3^ème^ cas</u> : $n\equiv 2 \quad [3]$

Alors : $n^2\equiv 2^2 \quad [3]$

$n^2\equiv 4 \quad [3]$

$n^2-1\equiv 3 \quad [3]$

$n^2-1\equiv 0 \quad [3]$

Par conséquent : $n\left(n^2-1\right)\equiv 2\times 0 \quad [3]$

$n\left(n^2-1\right)\equiv 0 \quad [3]$

Donc $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3

Donc | pour tout entier relatif n : $n\left(n^2-1\right)$ est divisible par 3 |

Question 2

$42 = 6\times 7$ d'où
$42 \equiv 6\times 7 \ [5]$

Or $6\equiv 1 \ [5]$
Et $7\equiv 2 \ [5]$
d'où $7^2 \equiv 4 \ [5]$
donc $7^2 \equiv -1 \ [5]$

Or $42^{41} \equiv 6^{41}\times 7^{41} \ [5]$
$42^{41} \equiv 6^{41}\times 7^{2\times 20+1} \ [5]$

$42^{41} \equiv 6^{41}\times \left(7^2\right)^{20}\times 7 \ [5]$

$42^{41} \equiv 1^{41}\times (-1)^{20}\times 2 \ [5]$
$42^{41} \equiv 1\times 1\times 2 \ [5]$
$42^{41} \equiv 2 \ [5]$

Or $0\le 2<5$

Donc **le reste dans la division euclidienne de 42^{41} par 5 est égal à 2.**

Question 3

Pour tout entier $n\ge 2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$16 \equiv 1 \ [n]$

$16-1 \equiv 1-1 \ [n]$

$15 \equiv 0 \ [n]$

n divise 15

Les diviseurs de 15 sont :
$-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5$ et 15

Or $n\ge 2$

Par conséquent :

il y a trois entiers n tels que $16 \equiv 1 \ [n]$: $3, 5$ et 15.

Question 4

1. a) Calculons le PGCD de 420 et 660 à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$660 = 420\times 1 + 240$
$420 = 240\times 1 + 180$
$240 = 180\times 1 + 60$
$180 = 60\times 3 + 0$

Le dernier diviseur est 60,
donc : **le PGCD de 420 et 660 est égal à 60.**

Calculons le PGCD de 66 et 70 à l'aide des décompositions en produits de facteurs premiers:

420	2
	5
42	2
	3
7	7
1	

660	2
	5
66	2
	3
11	11
1	

Donc $420 = 2^2\times 3\times 5\times 7$

donc $660 = 2^2\times 3\times 5\times 11$

D'où :
PGCD $(660\ ,\ 420) = 2^2\times 3\times 5 = 60$

donc : **le PGCD de 420 et 660 est égal à 60.**

b) $N = \dfrac{420}{660} = \dfrac{420\div 60}{660\div 60} = \boxed{\dfrac{7}{11}}$

Question 5

a) L'expression x^2+5x+6, où x est un réel, est un polynôme de degré 2.

Soit Δ son discriminant.
$\Delta = 5^2 - 4\times 1\times 6 = 1$
$\Delta > 0$, donc le polynôme x^2+2x-3 possède deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

. $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2\times 1} = -3$

. $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2\times 1} = -2$

Donc pour tout réel x :
$x^2+2x-3 = 1\left(x-(-3)\right)\left(x-(-2)\right)$.
$x^2+2x-3 = (x+3)(x+2)$.

On en déduit que pour tout n :
$n^2+2n-3 = (n+3)(n+2)$
C'est-à-dire $\underline{A = (n+2)(n+3)}$

Or $n+2$ et $n+3$ sont deux entiers. Donc le nombre A est bien le produit de deux entiers.

b) $A = (n+2)(n+3)$

Si n est un **entier naturel**, alors :
. $n+2$ est un entier supérieur ou égal à 2
. $n+3$ est un entier supérieur ou égal à 2

donc A est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2, donc n'est pas un nombre premier.

c) $A = (n+2)(n+3)$

Si A est un nombre premier, alors l'un des facteurs $n+2$ ou $n+3$ est égal à 1 ou -1.

. $n+2=1$ équivaut à $n=-1$
Dans ce cas, $A = 1\times 2 = 2$.
A est un nombre premier.

. $n+2=-1$ équivaut à $n=-3$
Dans ce cas, $A = -1\times 0 = 0$.
A n'est pas un nombre premier.

. $n+3=1$ équivaut à $n=-2$
Dans ce cas, $A = 0\times(-2) = 0$.
A n'est pas un nombre premier.

. $n+3=-1$ équivaut à $n=-4$
Dans ce cas, $A = -2\times(-1) = 2$.
A est un nombre premier.

Donc
les entiers n tels que A est un nombre premier sont -4 et -1.