Énoncé

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

1. Déterminer le PGCD de 66 et 70 de deux façons différentes :
a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
b) à l'aide des décompositions en produits de facteurs premiers.

2. Montrer que deux nombres entiers consécutifs sont premiers entre eux.

3. On note respectivement a_0 et a_1 le chiffre des unités et celui des dizaines d'un entier naturel N.

a) . Montrer que $N \equiv 10a_1 + a_0 \ [4]$.
. Retrouver alors le critère classique de divisibilité par 4.

b) . Montrer que : $4 \mid N \iff 4 \mid (2a_1 + a_0)$.
. En déduire un autre critère de divisibilité par 4.
. Appliquer ce critère à l'entier 241 396 .

4. n désigne un nombre entier naturel.
Montrer que les seuls restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 4 sont 0 et 1.
On pourra effectuer un raisonnement par disjonction des cas.

5. a) Montrer que pour tout entier n : $2^{2n} \equiv 1 \ [3]$.
b) En déduire que le nombre $2^{100} - 1$ est divisible par 3.

CORRIGÉ

1. a) Calculons le PGCD de 66 et 70 à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$70 = 66 \times 1 + 4$
$66 = 4 \times 16 + 2$
$4 = 2 \times 2 + 0$

Le dernier diviseur est 2, donc :

$\boxed{\text{le PGCD de 66 et 70 est égal à 2.}}$

b) Calculons le PGCD de 66 et 70 à l'aide des décompositions en produits de facteurs premiers:

66	3
	2
11	11
1	

70	5
	2
7	7
1	

donc $66 = \underline{2} \times 3 \times 11$ donc $70 = \underline{2} \times 5 \times 7$

D'où : $\boxed{\mathrm{PGCD}(66, 70) = 2}$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $d = \mathrm{PGCD}(n, n+1)$.

d divise n et $n+1$,

donc d divise toute combinaison linéaire de n et $n+1$, en particulier : $-n + (n+1)$
c'est-à-dire : 1 .

Donc $d = 1$.

Donc pour tout entier relatif n :
$\mathrm{PGCD}(n, n+1) = 1$

Donc n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Par conséquent, deux nombres entiers relatifs consécutifs sont premiers entre eux.

<u>Méthode maligne</u> de Margaux pour montrer que PGCD (n ; n +1) = 1 : avec l'algorithme d'Euclide !
$n+1 = n \times 1 + 1$
$n = 1 \times n + 0$
Donc $\mathrm{PGCD}(n, n+1) = 1$

3. Soient a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n les n entiers tels que $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$.

a) . Pour tout entier n :

$$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$
$$N = 10^2\left(a_n \times 10^{n-2} + a_{n-1} \times 10^{n-3} + \ldots + a_2\right) + a_1 \times 10 + a_0$$

Or $10^2 \equiv 0 \;[4]$ $\quad (\text{car } 100 = 4 \times 25)$

Donc pour tout entier n :

$$10^2\left(a_n \times 10^{n-2} + a_{n-1} \times 10^{n-3} + \ldots + a_2\right) \equiv 0 \;[4]$$

Donc $N \equiv 0 + 10a_1 + a_0 \;[4]$

$N \equiv 10a_1 + a_0 \;[4]$

. Pour tout entier N : $N \equiv 10a_1 + a_0 \;[4]$

$$\begin{aligned} 4 \mid N &\Leftrightarrow N \equiv 0 \;[4] \\ &\Leftrightarrow 10a_1 + a_0 \equiv 0 \;[4] \\ &\Leftrightarrow 4 \mid (10a_1 + a_0) \\ &\Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_1 a_0} \end{aligned}$$

On peut alors en déduire :

> un entier est divisible par 4 si, dans son écriture décimale, le nombre composé par les deux derniers chiffres est divisible par 4.

b) . $10 \equiv 2 \;[4]$ donc $10a_1 \equiv 2a_1 \;[4]$

. Pour tout entier N : $N \equiv 10a_1 + a_0 \;[4]$

donc $N \equiv 2a_1 + a_0 \;[4]$

$$\begin{aligned} 4 \mid N &\Leftrightarrow N \equiv 0 \;[4] \\ &\Leftrightarrow 2a_1 + a_0 \equiv 0 \;[4] \\ &\Leftrightarrow 4 \mid (2a_1 + a_0) \end{aligned}$$

On peut alors en déduire :

> un entier est divisible par 4 si, dans son écriture décimale, la somme du chiffre des unités et le double du chiffre des dizaine est divisible par 4.

. 241 396

Or : $2 \times 9 + 6 = 24$

Et : $2 \times 2 + 4 = 8$

8 étant divisible par 4, on en déduit que :

> 241 396 est divisible par 4

4. Effectuons un raisonnement par disjonction des cas.

D'après la propriété du cours, tout entier naturel n vérifie une, et une seule, des congruences $n \equiv 0 \;[4]$, $n \equiv 1 \;[4]$, $n \equiv 2 \;[4]$ ou $n \equiv 3 \;[4]$.

. <u>1^er^ cas</u> : $n \equiv 0 \;[4]$

Alors : $n^4 \equiv 0^4 \;[4]$

$n^4 \equiv 0 \;[4]$

Or $0 < 4$; donc le reste dans la division euclidienne de n^4 par 4 est égal à 0.

. <u>2^ème^ cas</u> : $n \equiv 1 \;[4]$

Alors : $n^4 \equiv 1^4 \;[4]$

$n^4 \equiv 1 \;[4]$

Or $1 < 4$; donc le reste dans la division euclidienne de n^4 par 4 est égal à 1.

. <u>3^ème^ cas</u> : $n \equiv 2 \;[4]$

Alors : $n^4 \equiv 2^4 \;[4]$

$n^4 \equiv 16 \;[4]$

$n^4 \equiv 0 \;[4]$

Or $0 < 4$; donc le reste dans la division euclidienne de n^4 par 4 est égal à 0.

. <u>4^ème^ cas</u> : $n \equiv 3 \;[4]$

Alors : $n^4 \equiv 3^4 \;[4]$

$n^4 \equiv 81 \;[4]$

$n^4 \equiv 1 \;[4]$

Or $1 < 4$; donc le reste dans la division euclidienne de n^4 par 4 est égal à 1.

Donc

> pour tout entier naturel n, les seuls restes possibles dans la division euclidienne de n^4 par 4 sont 0 et 1.

<u>Remarque</u> : on peut aussi regrouper les différents cas dans un tableau :

$n \equiv \ldots \;[4]$	0	1	2	3
$n^4 \equiv \ldots \;[4]$	0	1	0	1

5. a) . <u>1ère méthode</u> *: congruences*

On a : $4 \equiv 1 \ [3]$ $\quad (\text{car } 4 = 3\times 1 + 1)$

donc pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
4^n &\equiv 1^n \ [3]\\
4^n &\equiv 1 \ [3]\\
\left(2^2\right)^n &\equiv 1 \ [3]\\
2^{2n} &\equiv 1 \ [3]\\
2^{2n} - 1 &\equiv 1 - 1 \ [3]\\
2^{2n} - 1 &\equiv 0 \ [3]\\
2^{2n} - 1 + 1 &\equiv 0 + 1 \ [3]\\
2^{2n} &\equiv 1 \ [3]
\end{aligned}$$

. <u>2ème méthode</u> *: somme d'une suite géométrique*

Pour tout entier n :

$2^{2n} \equiv 1 \ [3] \iff 2^{2n} - 1 \equiv 0 \ [3]$

De plus, pour tout entier naturel n :

$$2^{2n} - 1 = \left(2^2\right)^n - 1 = 4^n - 1$$

$n \mapsto 4^n$ est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $4^0 = 1$.

Donc pour tout entier naturel n :

$$\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = 1 \times \frac{1-4^n}{1-4}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$

$$3 \times \sum_{i=0}^{n-1} 4^i = 3 \times \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right)$$

$$3 \times \sum_{i=0}^{n-1} 4^i = 4^n - 1$$

Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 4^i$ est un entier, donc 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.

C'est-à-dire : $2^{2n} - 1 \equiv 0 \ [3]$.

Donc : $2^{2n} \equiv 1 \ [3]$.

<u>3ème méthode</u> *: raisonnement par récurrence*

Montrons que pour tout entier naturel n, le nombre $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

. <u>Initialisation</u>

Montrons que la propriété est vraie au rang $n = 0$:

$2^{2n} - 1 = 2^{2\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$

Or 3 divise 0 , donc le nombre $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

La propriété est vraie au 1er rang.

. <u>Hérédité</u>

Soit k un entier naturel.

. Supposons que la propriété est vraie au rang k , c'est à dire que : le nombre $2^{2k} - 1$ est divisible par 3.

. Montrons alors que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est à dire que :

. le nombre $2^{2(k+1)} - 1$ est divisible par 3.

$$\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1\\
&= 2^{2k} \times 2^2 - 1\\
&= 2^{2k} \times 4 - 1
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, 3 divise le nombre $2^{2k} - 1$, donc il existe un entier naturel q tel que : $2^{2k} - 1 = 3q$, c'est-à-dire $2^{2k} = 1 + 3q$.

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= (1+3q)\times 4 - 1\\
&= 3 + 12q\\
&= 3(1+4q)
\end{aligned}$$

$1 + 4q$ est un entier naturel, donc le nombre $2^{2(k+1)} - 1$ est divisible par 3.

Donc la propriété est « héréditaire » .

. <u>Conclusion</u>

Pour tout entier naturel n, le nombre $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

C'est-à-dire : $2^{2n} \equiv 1 \ [3]$

b) On a vu à la question précédente que pour tout entier n : $2^{2n} \equiv 1 \ [3]$, donc $2^{2n} - 1 \equiv 0 \ [3]$.

Pour $n = 50$, $2^{2\times n} = 2^{2\times 50} = 2^{100}$; donc $2^{100} - 1 \equiv 0 \ [3]$.

Donc le nombre $2^{100} - 1$ est divisible par 3.