



## Énoncé

TS Spé Maths  
Archives - Corrigés

Les 5 questions suivantes sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

- Démontrer que pour tout entier relatif  $n$  :  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 3.  
On utilisera et un raisonnement par disjonction de cas et les congruences.
- Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $42^{41}$  par 5.
- Déterminer les entiers  $n$  tels que  $16 \equiv 1 [n]$ .
- Déterminer le PGCD de 420 et 660 de deux façons différentes :
    - à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
    - à l'aide des décompositions en produits de facteurs premiers.
  - En déduire la forme simplifiée de la fraction  $N = \frac{420}{660}$ .
- Soit le nombre  $A = n^2 + 5n + 6$ , où  $n$  est un entier.
  - Montrer que pour tout entier  $n$ , le nombre  $A$  est le produit de deux entiers.
  - En déduire que si  $n$  est un entier naturel, alors  $A$  n'est pas un nombre premier.
  - Déterminer les entiers  $n$  tel que  $A$  est un nombre premier.

## CORRIGÉ

### Question 1

Effectuons un raisonnement par disjonction des cas.

D'après la propriété du cours, tout entier relatif  $n$  vérifie une, et une seule, des congruences  $n \equiv 0 [3]$ ,  $n \equiv 1 [3]$  ou  $n \equiv 2 [3]$ .

. 1<sup>er</sup> cas :  $n \equiv 0 [3]$

$$\text{Alors : } n^2 \equiv 0^2 [3]$$

$$n^2 \equiv 0 [3]$$

$$n^2 - 1 \equiv -1 [3]$$

$$\text{Par conséquent : } n(n^2 - 1) \equiv 0 \times (-1) [3]$$

$$n(n^2 - 1) \equiv 0 [3]$$

Donc  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 3

. 2<sup>ème</sup> cas :  $n \equiv 1 [3]$

$$\text{Alors : } n^2 \equiv 1^2 [3]$$

$$n^2 \equiv 1 [3]$$

$$n^2 - 1 \equiv 0 [3]$$

$$\text{Par conséquent : } n(n^2 - 1) \equiv 1 \times 0 [3]$$

$$n(n^2 - 1) \equiv 0 [3]$$

Donc  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 3

. 3<sup>ème</sup> cas :  $n \equiv 2 [3]$

$$\text{Alors : } n^2 \equiv 2^2 [3]$$

$$n^2 \equiv 4 [3]$$

$$n^2 - 1 \equiv 3 [3]$$

$$n^2 - 1 \equiv 0 [3]$$

$$\text{Par conséquent : } n(n^2 - 1) \equiv 2 \times 0 [3]$$

$$n(n^2 - 1) \equiv 0 [3]$$

Donc  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 3

Donc pour tout entier relatif  $n$  :  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 3

### Question 2

$$42 = 6 \times 7 \text{ d'où}$$

$$42 \equiv 6 \times 7 \pmod{5}$$

$$\text{Or } 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{Et } 7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\text{d'où } 7^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\text{donc } 7^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$\text{Or } 42^{41} \equiv 6^{41} \times 7^{41} \pmod{5}$$

$$42^{41} \equiv 6^{41} \times 7^{2 \times 20 + 1} \pmod{5}$$

$$42^{41} \equiv 6^{41} \times (7^2)^{20} \times 7 \pmod{5}$$

$$42^{41} \equiv 1^{41} \times (-1)^{20} \times 2 \pmod{5}$$

$$42^{41} \equiv 1 \times 1 \times 2 \pmod{5}$$

$$42^{41} \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\text{Or } 0 \leq 2 < 5$$

Donc le reste dans la division euclidienne de  $42^{41}$  par 5 est égal à 2.

### Question 3

Pour tout entier  $n \geq 2$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

$$16 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$16 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{n}$$

$$15 \equiv 0 \pmod{n}$$

$n$  divise 15

Les diviseurs de 15 sont :

$-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5$  et 15

$$\text{Or } n \geq 2$$

Par conséquent :

il y a trois entiers  $n$  tels que  $16 \equiv 1 \pmod{n}$  : 3, 5 et 15.

### Question 4

1. a) Calculons le PGCD de 420 et 660 à l'aide de l'algorithme d'Euclide par la méthode des divisions euclidiennes successives :

$$660 = 420 \times 1 + 240$$

$$420 = 240 \times 1 + 180$$

$$240 = 180 \times 1 + 60$$

$$180 = 60 \times 3 + 0$$

Le dernier diviseur est 60,

donc : le PGCD de 420 et 660 est égal à 60.

Calculons le PGCD de 420 et 660 à l'aide des décomp. en produits de facteurs premiers:

420	2	660	2
	5		5
42	2	66	2
	3		3
7	7	11	11
1			1

Donc

donc

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad 660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

D'où :

$$\text{PGCD}(660, 420) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

donc : le PGCD de 420 et 660 est égal à 60.

$$\text{b) } N = \frac{420}{660} = \frac{420 \div 60}{660 \div 60} = \frac{7}{11}$$

### Question 5

a) L'expression  $x^2 + 5x + 6$ , où  $x$  est un réel, est un polynôme de degré 2.

Soit  $\Delta$  son discriminant.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$$

$\Delta > 0$ , donc le polynôme

$x^2 + 5x + 6$  possède deux

racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que :

$$\cdot x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = -3$$

$$\cdot x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = -2$$

Donc pour tout réel  $x$  :

$$x^2 + 5x + 6 = 1(x - (-3))(x - (-2)).$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

On en déduit que pour tout  $n$  :

$$n^2 + 5n + 6 = (n + 3)(n + 2)$$

C'est-à-dire  $A = (n + 2)(n + 3)$

Or  $n + 2$  et  $n + 3$  sont deux entiers. Donc le nombre  $A$  est bien le produit de deux entiers.

$$\text{b) } A = (n + 2)(n + 3)$$

Si  $n$  est un **entier naturel**,

alors :

$\cdot n + 2$  est un entier supérieur ou égal à 2

$\cdot n + 3$  est un entier supérieur ou égal à 2

donc  $A$  est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2, donc  $n$  n'est pas un nombre premier.

$$\text{c) } A = (n + 2)(n + 3)$$

Si  $A$  est un nombre premier,

alors l'un des facteurs  $n + 2$  ou  $n + 3$  est égal à 1 ou  $-1$ .

$\cdot n + 2 = 1$  équivaut à  $n = -1$

Dans ce cas,  $A = 1 \times 2 = 2$ .

$A$  est un nombre premier.

$\cdot n + 2 = -1$  équivaut à  $n = -3$

Dans ce cas,  $A = -1 \times 0 = 0$ .

$A$  n'est pas un nombre premier.

$\cdot n + 3 = 1$  équivaut à  $n = -2$

Dans ce cas,  $A = 0 \times (-2) = 0$ .

$A$  n'est pas un nombre premier.

$\cdot n + 3 = -1$  équivaut à  $n = -4$

Dans ce cas,  $A = -2 \times (-1) = 2$ .

$A$  est un nombre premier.

Donc

les entiers  $n$  tels que  $A$  est un nombre premier sont  $-4$  et  $-1$ .